Identification des systèmes linéaires
Identification of linear systems

Ex. 1

Sur les figures 1-4 sont représentées les réponses de systèmes différents. Sur chacune des figures, le signal appliqué en entrée est représenté en pointillé et la sortie mesurée est en trait continu. Pour chacun des systèmes,
The responses of several distinct systems are depicted in figures 1-4. In each figure, the input signal is drawn with a dash line whereas the output signal is in solid line. For each system,

1. préciser en (justifiant) l'ordre du système ; *give (with justifications) the order of the system ;*
2. proposer une fonction de transfert en temps continu ; *propose a continuous time transfer function ;*
3. estimer les paramètres de la fonction de transfert ; *estimate parameters of the transfer function ;*
4. choisir une période d'échantillonnage adaptée pour étudier le système à l'aide d'un calculateur ; *choose an appropriate sampling period ;*
5. proposer une fonction de transfert en temps discret ; *propose a discrete time transfer function ;*
6. donner la représentation équivalente sous la forme d'une équation aux différences. *give the equivalent representation by means of a recursive equation.*

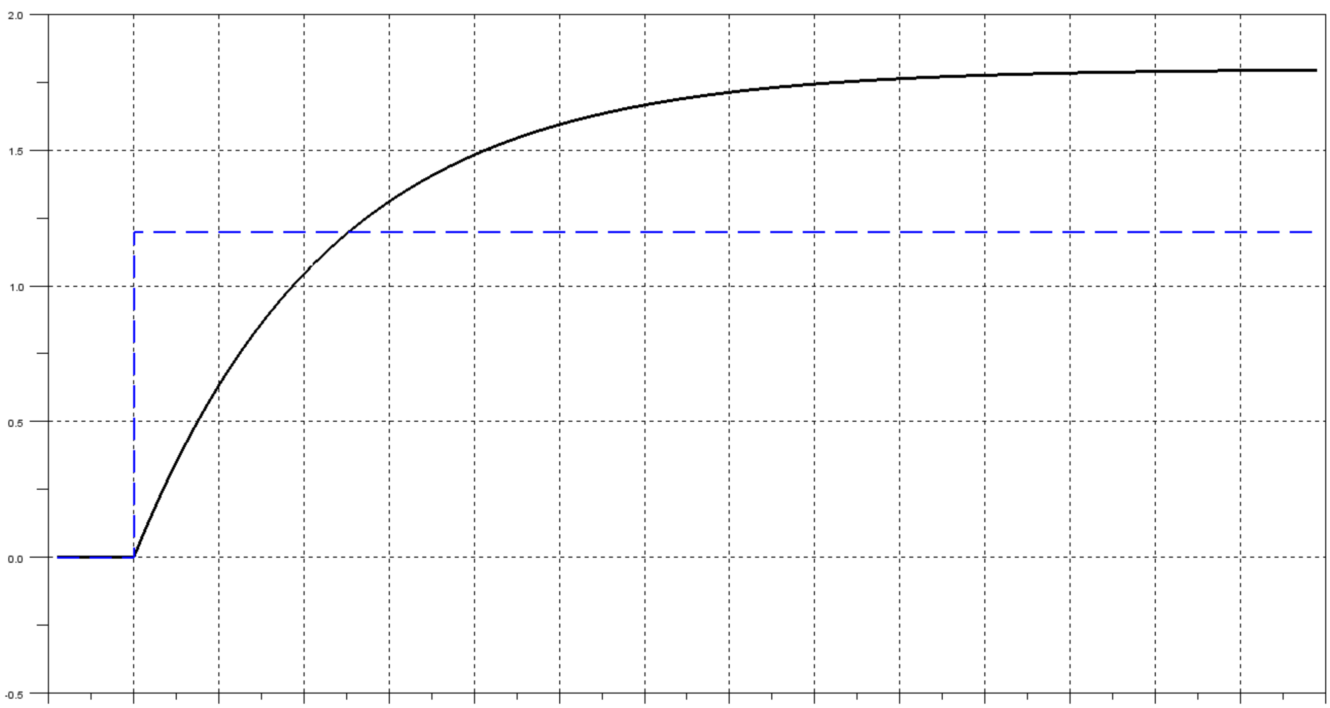


FIGURE 1 –

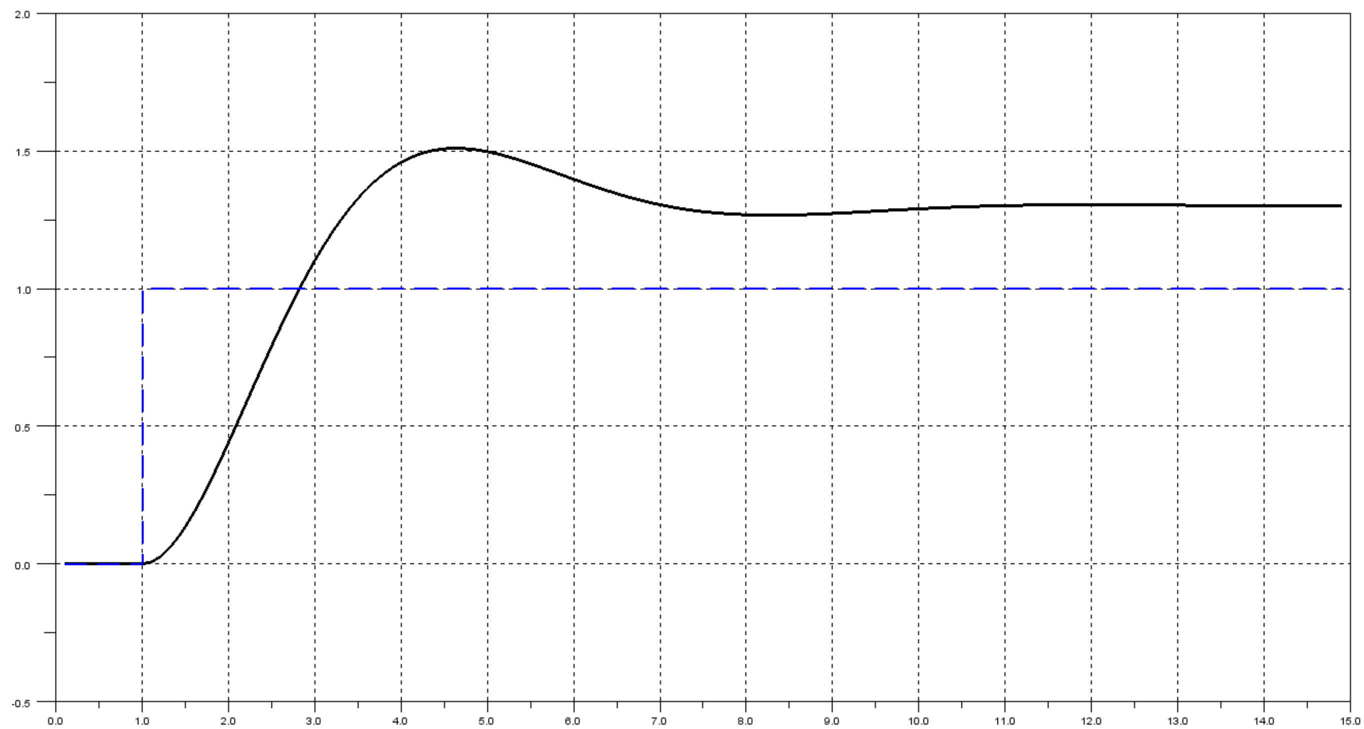


FIGURE 2 –

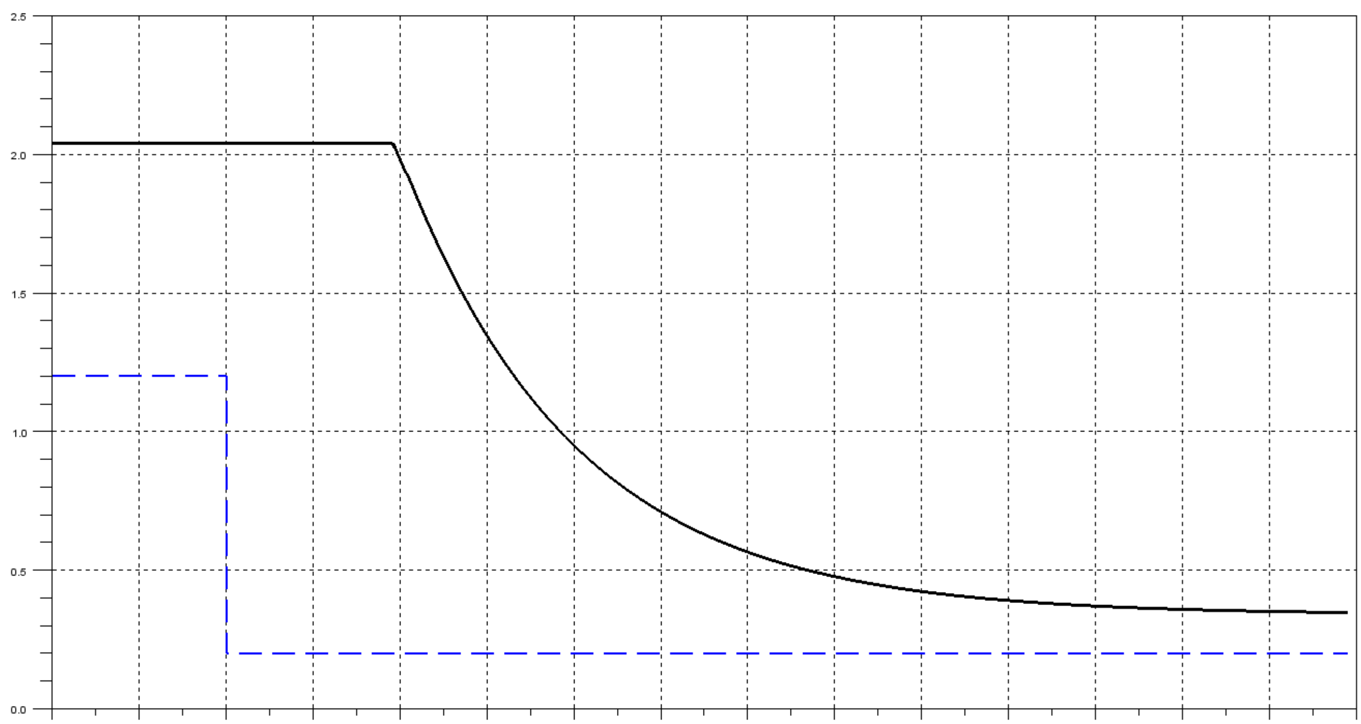


FIGURE 3 –

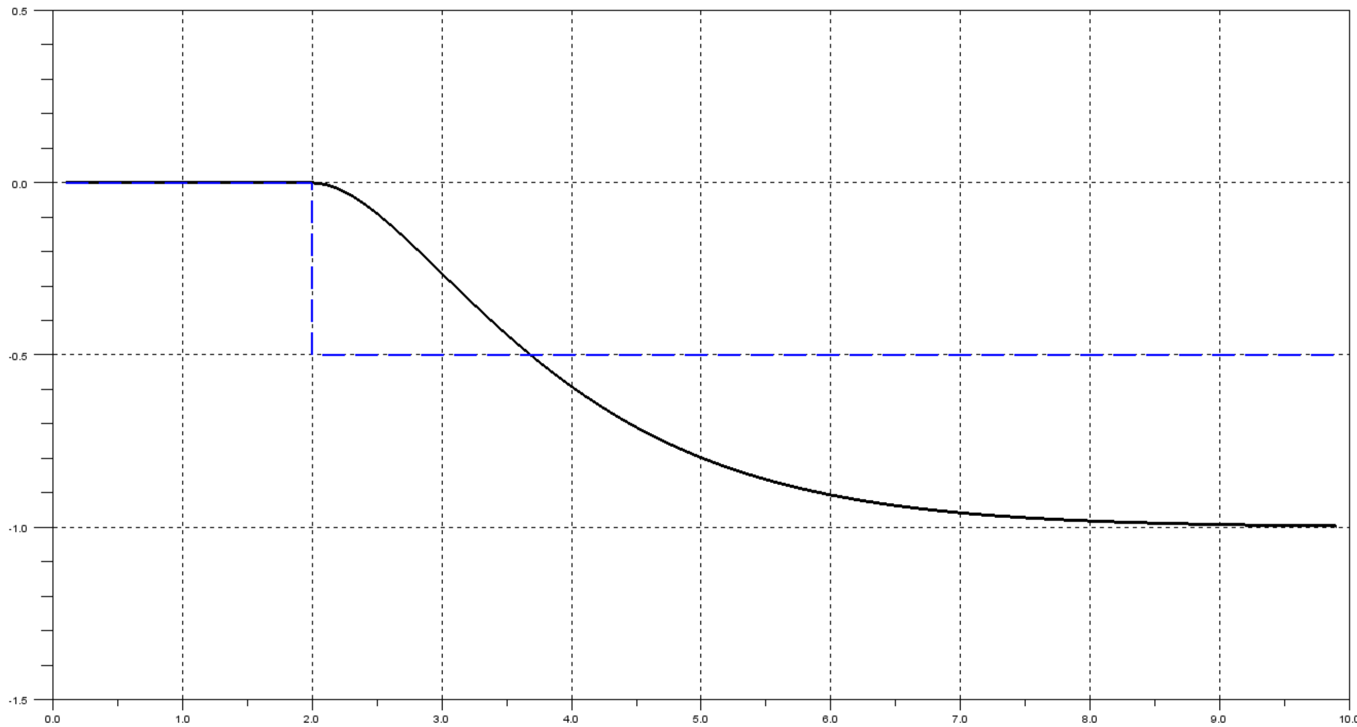


Figure 4 –

Ex. 2

On cherche ici à réaliser l'identification d'un système linéaire continu. On ne dispose d'aucune description *a priori* des phénomènes physiques en jeu. On a réalisé une première expérimentation correspondant à l'acquisition de la réponse indicielle du système. Le résultat de celle-ci est représentée sur la figure 5.

The goal is to identify a linear continuous system. We have no knowledge of physical phenomena implied in the system. In figure 5, a step response of the system is depicted.

1. Préciser en (justifiant) l'ordre du système. *Give (with justifications) the order of the system.*
2. Proposer une fonction de transfert en temps continu. *Propose a continuous time transfer function.*
3. Estimer les paramètres de la fonction de transfert. *Estimate parameters of the transfer function.*
4. Choisir une période d'échantillonnage adaptée pour étudier le système à l'aide d'un calculateur. *Choose an appropriate sampling period.*
5. Proposer une fonction de transfert en temps discret. *Propose a discrete time transfer function.*
6. Donner la représentation équivalente sous la forme d'une équation aux différences. *Give the equivalent representation by means of a recursive equation.*

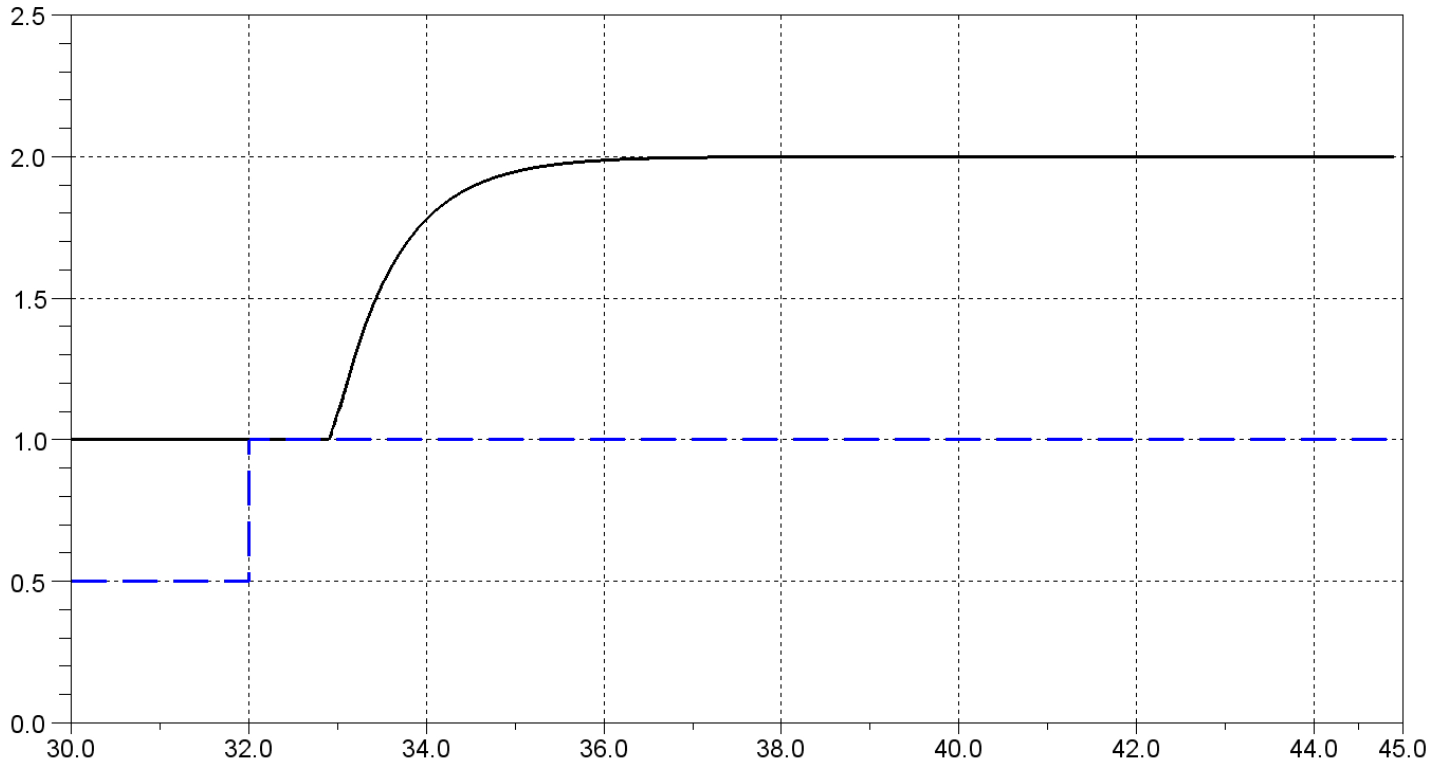


FIGURE 5 – Trait pointillé : signal appliqué en entrée du système ; trait continu : réponse mesurée / *dash line :input signal ; solid line : output signal*

Pour disposer d'une estimation précise des paramètres, la méthode des moindres carrés ordinaires va être appliquée. On suppose avoir effectué N mesures de la sortie en réponse à une entrée connue.
To get an accurate estimation of parameters values, the least square method is used.

7. Exprimer en fonction des $u(i)$ et $y(i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$ la matrice Φ et le vecteur Y.
   To get an accurate estimation of parameters values, the least square method is used. Express matrix Φ and vector Y as functions of $u(i)$ and $y(i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$.
8. On a, au cours d'une expérience, relevé les mesures suivantes :
   An experiment has provided the following measures :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u(k)$	1	$-1/2$	0	1	$-1/2$	0	1	1	0
$y(k)$	0	0	1	0	0	1	0	0	1

   Calculer $\widehat{\theta}$. Calculez la valeur du critère $J(\widehat{\theta})$. Qu'en concluez-vous ?
   Evaluate $\widehat{\theta}$ and $J(\widehat{\theta})$. Conclude.

Ex. 3

A l'issue de la caractérisation d'un système continu échantillonné, on choisit un modèle paramétrique de la forme :
The characterization of a discrete time sampled system led to the following parametric model :

$$y(k) = -ay(k-1) + bu(k-1) \; .$$

1. On suppose avoir effectué N mesures de la sortie en réponse à une entrée connue. Exprimer en fonction des $u(i)$ et $y(i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, la matrice Φ et le vecteur Y définis pour la méthode des moindres carrés ordinaires.
   We assume that an experiment has been carried out to get N measures of a random input and the response of the system. Express, as a function of $u(i)$ and $y(i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, matrix Φ and vector Y defined for the ordinary least square method.

2. On rappelle que $\widehat{\theta}$, l'estimateur au sens des moindres carrés ordinaires, s'exprime par :
Let us recall that $\widehat{\theta}$, the parameters estimation according to the least square method, is given by :

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \left(\Phi^T \Phi\right)^{-1} \Phi^T Y \ .$$

On a, au cours d'une expérience, relevé les mesures suivantes des couples (u, y) :
An experimen provided the following pairs of measures (u, y) :

k	1	2	3	4
$u(k)$	2	1	4	3
$y(k)$	0	2	2	5

Calculer $\widehat{\theta}$ et le critère $J(\widehat{\theta})$. Qu'en concluez-vous sur le modèle obtenu ?
Evaluate $\widehat{\theta}$ and criterion $J(\widehat{\theta})$. What are your conclusions regarding the obtained model ?

3. D'autres expérimentations (à des instants différents) ont donné les mesures suivantes de la sortie pour les mêmes valeurs d'entrée $u(i)$ appliquées au même système :
Other experiments (at distinct time instants) provided the following output measures in response to the same input values $u(i)$ as above :

	k	1	2	3	4
experiment 2 :	$y(k)$	0	$1,9$	$2,05$	$5,025$
experiment 3 :	$y(k)$	$-0,5$	$2,1$	$1,7$	$5,3$

Calculer pour chaque expérimentation, le vecteur $\widehat{\theta}$ et le critère $J(\widehat{\theta})$. Qu'en concluez-vous ? En particulier, la méthode des moindres carrés ordinaires vous semble-t-elle la plus judicieuse pour l'estimation des paramètres de ce système ?
Evaluate $\widehat{\theta}$ and criterion $J(\widehat{\theta})$. What are your conclusions ? In particular, do you think that the ordinary least square method is the most appropriate for the parameters estimation of this system ?

Ex. 4

Pour un système continu échantillonné, on a choisi comme modèle paramétrique l'équation aux différences :
For a discrete time sampled system, the following recursive equation has been selected as model :

$$y(k+2) = -a_1 y(k+1) - a_0 y(k) + b_0 u(k) \ .$$

On a, au cours d'une expérience, relevé les mesures suivantes des couples (u, y) :
During an experiment, the following pairs of values for (u, y) have been measured :

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$u(k)$	2	3	4	3	5	6	1	1
$y(k)$	0	0	2	-1	4	-4	9	-8

1. Est-il satisfaisant d'utiliser le vecteur de paramètres suivant pour le modèle de ce système ?
Is the following parameters vector satisfactory for this system ?

$$\theta = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ex. 5

On cherche ici à réaliser l'identification d'un système linéaire continu. On ne dispose d'aucune description *a priori* des phénomènes physiques en jeu.
On a réalisé une expérimentation correspondant à l'acquisition de la réponse indicielle du système. Le résultat de celle-ci est représentée sur la figure 6.
A linear continuous system is to be identified. We don't have any knowledge about phenomena implied into the system.
The acquisition of a step response of the system is depicted in Figure 6.

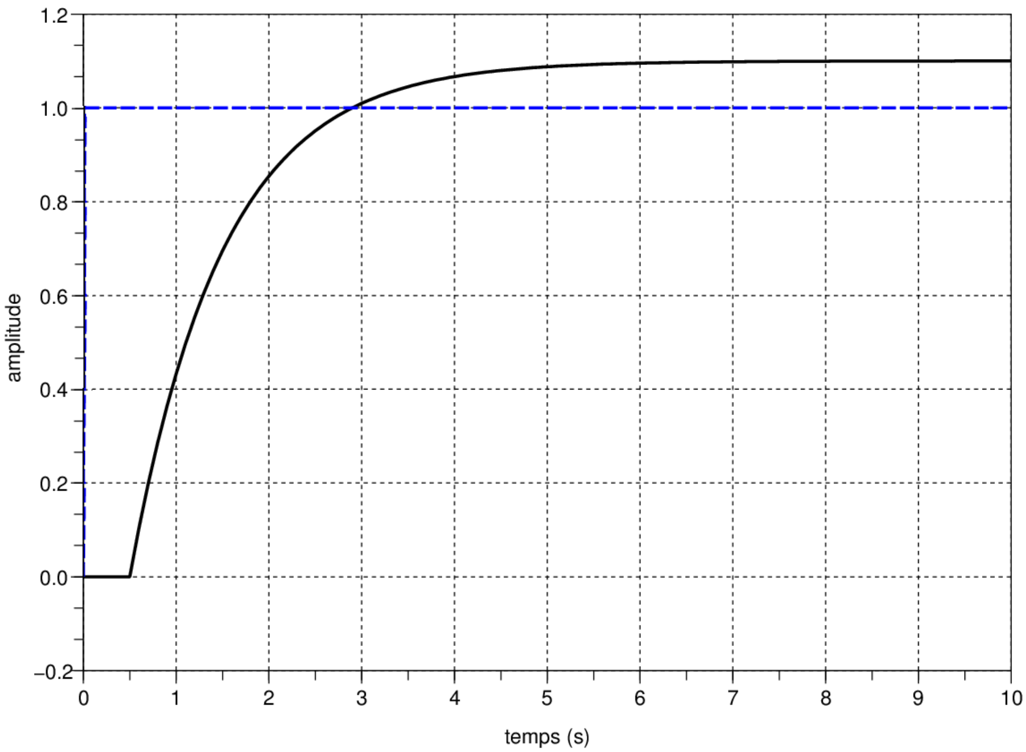


FIGURE 6 –

1. Préciser en justifiant l'ordre du système.
   Give (with justifications) the order of the system.
2. Proposer un modèle sous la forme d'une fonction de transfert.
   Propose a model in the form of a transfer function.
3. On souhaite étudier ce système *via* un calculateur et donc disposer d'un modèle pour ce système lorsqu'il est échantillonné. On a choisi $\Delta = 0,5s$ comme période d'échantillonnage. Préciser (en justifiant) si ce choix de période d'échantillonnage est judicieux.
   It is planned to study the system by means of a calculator and we would like to establish a model for the discrete time sampled system. Is the choice $\Delta = 0,5s$ as sampling period an appropriate one ?
4. Proposer une structure du modèle du système échantillonné sous la forme d'une équation aux différences.
   Propose a recursive equation to model the system.
5. Pour disposer d'une estimation précise des paramètres, la méthode des moindres carrés ordinaires va être appliquée. On suppose avoir effectué N mesures de la sortie en réponse à une entrée connue. Exprimer en fonction des $u(i)$ et $y(i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ la matrice Φ et le vecteur Y.
   To get an accurate estimation of parameters values, the least square method is used. Express matrix Φ and vector Y as functions of $u(i)$ and $y(i)$, $i = 1, 2, \dots, N$.
6. On a, au cours d'une expérience, relevé les mesures suivantes des couples (u, y) :
   An experiment has provided the following pairs of measures (u, y) :

instants d'échantillonnage $k\Delta$	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$
$u(k)$	1	1	0	2	3
$y(k)$	0	0	0.4	0.7	0.4

   Calculer $\widehat{\theta}$. Calculez la valeur du critère $J(\widehat{\theta})$. Qu'en concluez-vous ?
   Evaluate $\widehat{\theta}$ and $J(\widehat{\theta})$. Conclude.

Représentation d'état des systèmes linéaires
State-space approach for linear systems

Ex. 6

Soit un processus en temps continu décrit par l'équation différentielle $\ddot{y}(t) = u(t)$. On choisit comme variables d'état $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t)$. On considère des conditions initiales nulles, c'est-à-dire $\ddot{y}(0) = \dot{y}(0) = y(0) = 0$.
Let a continuous time process be described by the differential equation $\ddot{y}(t) = u(t)$. We choose as state variables $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t)$. We consider zero initial conditions, i.e. $\ddot{y}(0) = \dot{y}(0) = y(0) = 0$.

1. Donner la représentation d'état du système. *Give the state representation of the system.*
2. A partir de sa représentation d'état, calculer la fonction de transfert du système. From its state representation, calculate the transfer function of the system.
3. A partir de la fonction de transfert obtenue, pouvez-vous directement vous prononcer quant à la stabilité du système ? From the transfer function obtained, can you make a direct statement about the stability of the system ?
4. A partir de sa représentation d'état, vérifier si le système est stable. *From its state representation, check whether the system is stable.*
5. Evaluer e^{At}. *Evaluate e^{At}.*

Ex. 7

Sur la figure 7 est schématisé un système composé d'une bille qui roule sur une règle. A l'aide d'un moteur, on agit sur l'angle $\theta(t)$ d'inclinaison de la règle. On souhaite commander la position de la bille sur la règle $d(t)$ (sortie du système). Pour simplifier on considèrera que la bille glisse sans frottement (plutôt que roule), c'est-à-dire que l'on négligera le moment d'inertie de la bille.
Figure 7 shows a diagram of a system consisting of a ball rolling on a beam. A motor is used to control the angle $\theta(t)$ of inclination of the beam. We wish to control the position of the ball on the beam $d(t)$ (output of the system). For simplicity, we will consider that the ball slides without friction (rather than rolls), i.e. we will neglect the moment of inertia of the ball.

1. Etablissez une équation différentielle linéaire qui décrit de façon approchée le comportement entre $\theta(t)$ et la sortie du système $d(t)$. *Establish a linear differential equation that approximates the behaviour between $\theta(t)$ and the output of the system $d(t)$.*
2. On va considérer que l'entrée du système $u(t)$ est la tension appliquée au moteur, et que l'angle $\theta(t)$ est proportionnelle à cette tension, c'est-à-dire :
   We will consider that the input of the system $u(t)$ is the voltage applied to the motor, and that the angle $\theta(t)$ is proportional to this voltage, that is :
   $$u(t) = \alpha\theta(t),$$
   avec α une constante. Déduisez-en sa fonction du transfert.
   with α a constant. Deduce its transfer function.
3. Intuitivement puis à partir de la FdT, prononcez-vous quant à la stabilité du système.
   Intuitively and then from the transfer function, decide on the stability of the system.
4. Etablissez la représentation d'état du système.
   Establish the state representation of the system.
5. A partir de cette représentation, vérifiez votre conclusion quant à la stabilité du système.
   From this representation, check your conclusion about the stability of the system.
6. Prononcez-vous quant à la commandabilité du système.
   Make a statement about the controllability of the system.
7. Prononcez-vous quant à l'observabilité du système.
   Make a statement about the observability of the system.

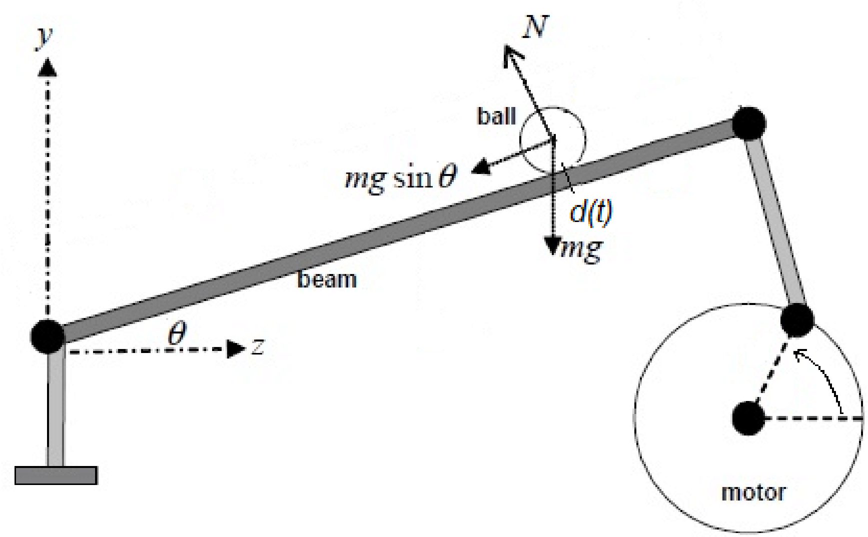


FIGURE 7 – Schéma du système bille-règle *Diagram of the ball-beam system*

Ex. 8

On se propose d'étudier un système en temps continu décrit par les équations suivantes :
We propose to study a continuous time system described by the following equations :

$$\begin{cases} S\dot{h_1} &= q_1 - kh_1 \\ S\dot{h_2} &= kh_1 - kh_2 \\ S\dot{h_3} &= q_2 + kh_2 - kh_3 \\ S\dot{h_4} &= kh_3 - kh_4 \end{cases}$$

1. On choisit $x = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$ comme vecteur d'états et $u = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ comme vecteur d'entrées. k et S sont des paramètres du système. Etablissez les matrices A et B de l'équation d'évolution du système.
   We choose $x = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$ as state vector and $u = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ as an input vector. k and S are parameters of the system. Establish the matrices A and B of the evolution equation of the system.
2. Quelles sont les racines du polynôme caractéristique de A ? Sachant que les paramètres k et S ont des valeurs positives, concluez quant à la stabilité du système.
   What are the roots of the characteristic polynomial of A ? Knowing that the parameters k and S have positive values, conclude on the stability of the system.

Ex. 9

Soit un processus en temps continu décrit par l'équation différentielle suivante :
Let a continuous time process be described by the following differential equation :

$$\dddot{y}(t) + 2\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) - 2y(t) = u(t) \ .$$

On considère des conditions initiales nulles, c'est-à-dire $\dddot{y}(0) = \ddot{y}(0) = \dot{y}(0) = y(0) = 0$.
We consider zero initial conditions, i.e. $\dddot{y}(0) = \ddot{y}(0) = \dot{y}(0) = y(0) = 0$.

1. Donner la fonction de transfert du système.
   Give the transfer function of the system.
2. Donner une représentation d'état de ce système.
   Give a state representation of this system.
3. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice d'évolution.
   Calculate the characteristic polynomial of the evolution matrix.
4. Vérifier que 1 est une racine de ce polynôme. Conclure quant à la stabilité du système.
   Check that 1 is a root of this polynomial. Is the system stable ?

Ex. 10

On considère le système décrit par la représentation d'état suivante :
Consider the system described by the following state representation :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{array}\right.$$

où u est l'entrée, y la sortie et x le vecteur d'état.
where u is the input, y the output and x the state vector.

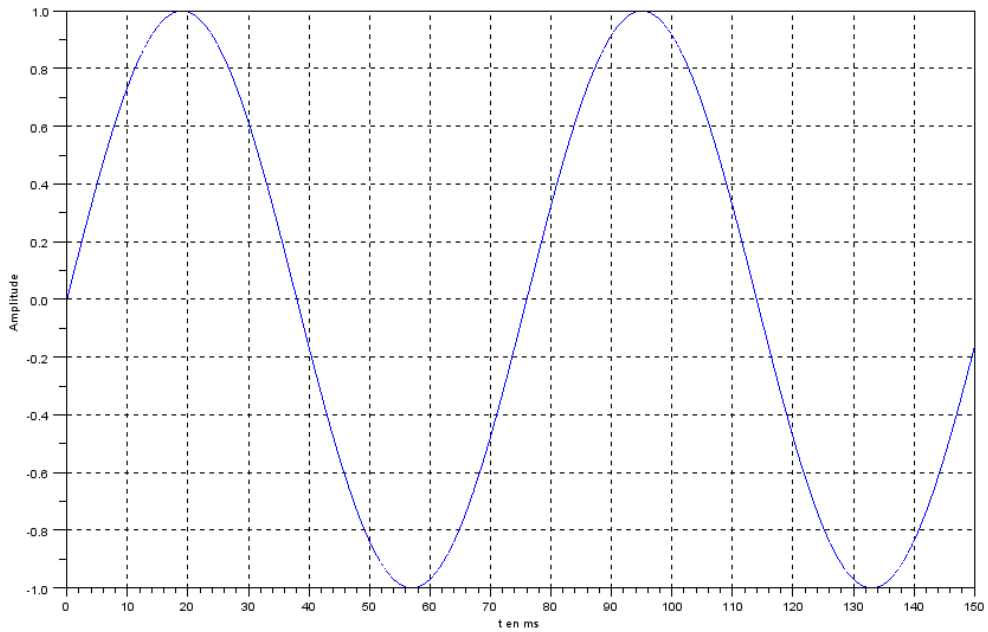
1. Le système est-il stable ?
   Is the system stable ?
2. Le système est-il commandable ?
   Is the system controllable ?
3. Montrer que la fonction de transfert du système est :
   Show that the transfer function of the system is :

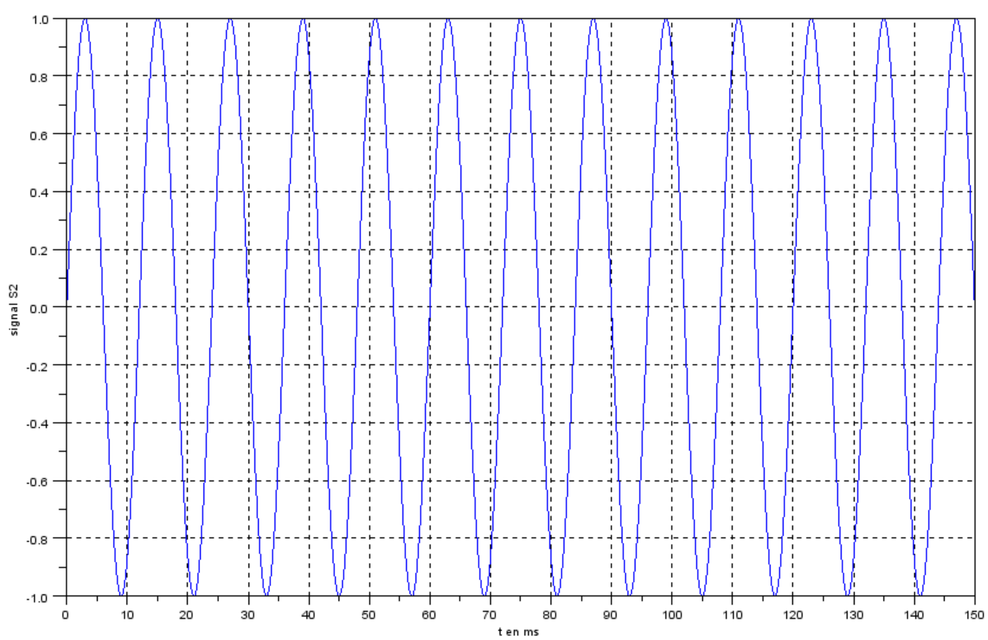
$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-18s + 20}{s^3 + 21s^2 + 20s}$$

Ex. 11

Dans le support de cours, on a abordé l'étude de processus continus *via* un calculateur, et on a notamment détaillé la chaîne de traitement des signaux mis en jeu. La période d'échantillonnage Δ est une donnée fondamentale, elle cadence l'acquisition du signal de sortie $y(t)$ et la reconstitution du signal de commande $u(t)$. La fréquence d'échantillonnage f_e ($f_e = \frac{1}{\Delta}$) doit notamment respecter $f_e \geq 5f_h$ où f_h est la fréquence la plus élevée à conserver dans le signal. Afin d'illustrer l'aspect fondamental de cette condition, réalisez le travail suivant :
In the course manuscript, the study of continuous processes via a computer was discussed, and in particular the signal processing chain involved was detailed. The sampling period $y(t)$ is a fundamental data, it cadences the acquisition of the output signal $y(t)$ and the reconstitution of the control signal $u(t)$. The sampling frequency f_e ($f_e = \frac{1}{\Delta}$) must respect in particular $f_e \geq 5f_h$ where f_h is the highest frequency to be kept in the signal. To illustrate the fundamental aspect of this condition, carry out the following work :

1. Tracez sur la figure 8, le signal résultant de l'échantillonnage de S_1 à une fréquence (f_e) de 100 Hz. Superposez le signal bloqué correspondant. Commentez.
   Plot on the figure the signal resulting from sampling S_1 at a frequency (f_e) of 100 Hz. Superimpose the corresponding blocked signal. Comment on it.
2. *Idem* pour le signal S_2 avec f_e=100Hz.
   Same work for the signal S_2 with f_e=100Hz.
3. *Idem* pour le signal S_3 avec f_e=50Hz.
   Same work for the signal S_3 with f_e=50Hz.


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
Amplitude
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
t en ms


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
signal S2
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
t en ms

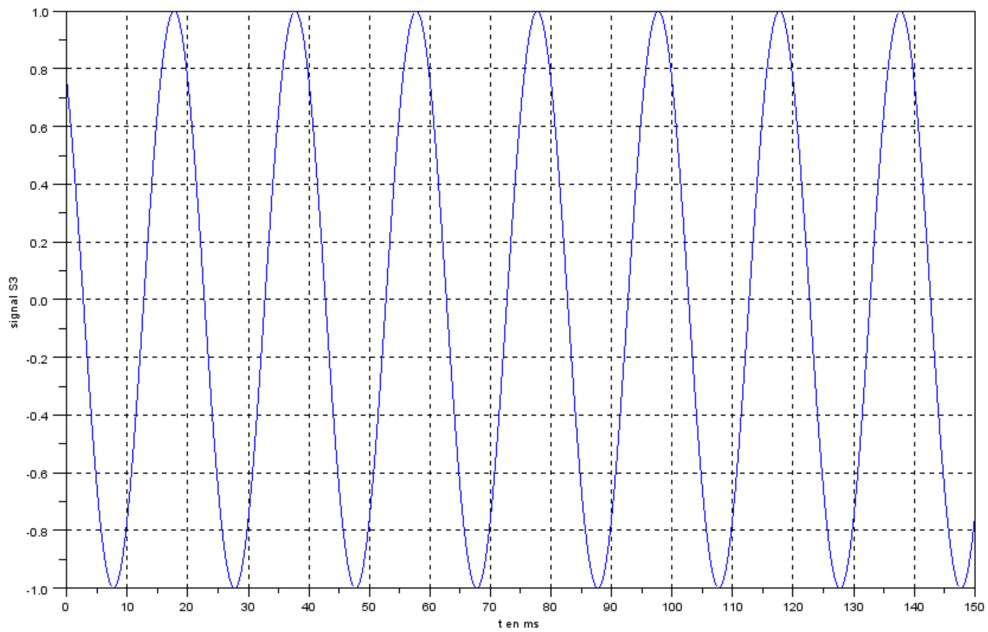


FIGURE 8 – Illustrations pour le choix de la période d'échantillonnage - *Illustrations for the choice of the sampling period*

Ex. 12

On suppose que l'on va étudier *via* un calculateur le système considéré dans l'exercice 7. On note Δ la période d'échantillonnage choisie. Donner les matrices de la réprésentation d'état du système échantillonné à la période Δ (c'est-à-dire les matrices notées A_{ech}, B_{ech} et C_{ech} dans votre support).
It is assumed that the system considered in exercise 7 will be studied from a computer. Let us note Δ the chosen sampling period. Give the matrices of the state representation of the system sampled at the period Δ (i.e. the matrices noted A_{ech}, B_{ech} and C_{ech} in the manuscript)

Ex. 13

On considère un élevage de lapins dont on étudie la population tous les ans. On suppose :
We consider a rabbit farm whose population is studied every year. We assume :

- qu'un couple de lapins devient fertile à l'age d'un an ;
  that a pair (a male and female) of rabbits becomes fertile at the age of one year ;
- qu'un couple de lapins fertiles donne naissance à un couple tous les ans ;
  that a pair of fertile rabbits gives birth to a pair every year ;
- que la mortalité est nulle.
  that mortality is zero.

Chaque année, on introduit (ou retire) des couples de lapins non fertiles. Il s'agit de l'entrée du système : $u(k)$ représente le nombre de couples non fertiles introduits (ou retirés) à l'année k. On considère comme sortie, notée $y(k)$, le nombre total de lapins à l'année k. On choisit comme variables d'état :
Each year, pairs of non-fertile rabbits are introduced (or removed). This is the input of the system : $u(k)$ represents the number of non-fertile pairs introduced (or withdrawn) in year k. The output, $y(k)$, is the total number of rabbits in year k. We choose as state variables :

- $x_1(k)$ le nombre de couples de lapins ; *the number of pairs of rabbits ;*
- $x_2(k)$ le nombre de couples de lapins fertiles ; *the number of fertile pairs of rabbits*

1. Etablir la représentation d'état du système. *Establish the state representation of the system.*
2. Que signifie concrètement (en termes de nombres de lapins) le fait que le système soit stable ? *What does it mean in concrete terms (in terms of numbers of rabbits) that the system is stable ?*
3. Intuitivement, puis à partir de la représentation d'état, prononcez-vous quant à la stabilité du système. *Intuitively, and then on the basis of the state representation, decide on the stability of the system.*
4. Le système est-il commandable ? *Is the system controllable ?*
5. Le système est-il observable ? *Is the system observable ?*

On considère maintenant que la mortalité est nulle seulement chez les couples non fertiles. On note $1/a$ le taux de survie d'une année sur l'autre parmi les couples fertiles. On suppose que les couples mourrant dans l'année, ne procréent pas cette année-là.
It is now assumed that mortality is zero only among non-fertile couples. The year-to-year survival rate among fertile couples is denoted by $1/a$. It is assumed that couples dying in the year do not procreate in that year.

6. Déterminer la valeur maximale de a pour que le système soit stable.
   Determine the maximum value of a for the system to be stable.

Ex. 14

Une société de production de véhicules, que nous appellerons Penault, a deux secteurs d'activité :
A vehicle production company, which we will call Penault, has two business lines :

- les voitures, *cars,*
- les poids-lourds. *trucks.*

Son montage financier (un peu simplifié !) se décrit comme suit :
Its financial set-up (somewhat simplified !) is described as follows :

- chaque fin d'année k, Penault investit un capital désigné par $u(k)$ dans ses deux activités : $\frac{2}{3}u(k)$ pour les voitures, $\frac{1}{3}u(k)$ pour les poids lourds ;
  At the end of each year k, Penault invests a capital designated by $u(k)$ in its two activities : $\frac{2}{3}u(k)$ for cars, $\frac{1}{3}u(k)$ for trucks ;
- Penault fait des pertes dans le secteur des voitures : $\frac{1}{10}$ des capitaux investis dans les voitures sont perdus chaque année (pour un euro investi en début d'année, il y a 10 cents perdus en fin d'année).
  Penault is making losses in the car business : $\frac{1}{10}$ of capital invested in cars is lost every year (for every euro invested at the beginning of the year, there are 10 cents lost at the end of the year).
- Penault fait des bénéfices dans les poids lourds : les capitaux investis rapportent chaque année $\frac{1}{4}$ de leurs valeurs (pour un euro investi en début d'année, il y a 25 cents de bénéfices en fin d'année).
  Penault is making profits in the trucks : the capital invested returns $\frac{1}{4}$ of its value each year (for one euro invested at the beginning of the year, there are 25 cents in profits at the end of the year).
- Les bénéfices générés par les poids lourds sont réinvestis à la fin de chaque année dans les deux secteurs : la moitié des bénéfices sont réinvestis dans les voitures pour renflouer cette activité, et l'autre moitié dans les poids lourds.
  The profits generated by the trucks are reinvested at the end of each year in both sectors : half of the profits are reinvested in cars to replenish this business, and the other half in trucks.

On note
We denote

- $x_1(k)$ le capital cumulé au début de l'année k dans le secteur des voitures ;
  $x_1(k)$ the accumulated capital at the beginning of year k in the car sector ;
- $x_2(k)$ le capital cumulé au début de l'année k dans le secteur des poids lourds.
  $x_2(k)$ the accumulated capital at the beginning of year k in the truck sector.

1. Trouver les équations, correspondant à une représention d'état, sachant que l'entrée $u(k)$ est le capital injecté à la fin de l'année k, et que la sortie $y(k)$ est le capital total (pour les deux activités) cumulé au début de l'année k (avant l'injection du capital extérieur traduite par $u(k)$).
   Find the equations, corresponding to a state representation, where the input $u(k)$ is the capital injected at the end of year k, and the output $y(k)$ is the total capital (for both activities) accumulated at the beginning of year k (before the injection of external capital reflected by $u(k)$).
2. En termes financiers, que signifie le fait que le système soit stable ?
   In financial terms, what does it mean that the system is stable ?

3. Le système est-il stable ?
   Is the system stable ?
4. Le système est-il observable ?
   Is the system observable ?
5. Le système est-il commandable ?
   Is the system controllable ?

Ex. 15

Soit un processus en temps continu décrit par les équations différentielles suivantes :
Let a continuous time process be described by the following differential equations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & a_1 x_1(t) + u(t) \\ y(t) & = & x_1(t) \end{array} \right.$$

Les variables $u(t)$ et $y(t)$ représentent respectivement l'entrée et la sortie du système. D'autre part, on choisit comme vecteur d'état $x(t)$ avec
The variables $u(t)$ and $y(t)$ represent the input and output of the system respectively. On the other hand, we choose as state vector $x(t)$ with

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

1. Donner la représentation d'état du système.
   Give the state representation of the system.
2. Calculer la fonction de transfert du système.
   Vous devez obtenir une fonction de transfert d'un système du deuxième ordre de la forme suivante :
   Calculate the transfer function of the system. You must obtain a transfer function of a second order system of the following form :
   $$H(s) = \frac{k}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + 1}. \tag{1}$$
   Notez que ceci correspond à un système du deuxième ordre dont le coefficient d'amortissement ξ est nul.
   Note that this corresponds to a second order system with a damping ratio ξ of zero.
3. Supposons que $\omega_n = 2$ dans la fonction de transfert obtenue et mise sous la forme (1). Quelle est la valeur du paramètre a_1 ? Déduisez-en la valeur de k.
   Let us suppose that $\omega_n = 2$ in the transfer function obtained and put in the form (1). What is the value of the parameter a_1 ? Deduce from this the value of k.
4. Le système est-il stable ?
   Is the system stable ?
5. Le système est-il commandable ? Que peut-on en déduire ?
   Is the system controllable ? What can be inferred from this ?

   On va appliquer une commande par retour d'état en vue d'imposer les pôles du système corrigé. Plus précisément, on souhaite que le système corrigé par retour d'état, admette pour polynôme caractéristique :
   We will apply a state feedback control in order to impose the poles of the corrected system. More precisely, we wish that the system corrected by state feedback, admits for characteristic polynomial :

   $$P_{des}(s) = (s+2)^2$$
6. Commentez ce choix.
   Comment on this choice.
7. Déterminer la matrice de régulation L permettant d'obtenir $P_{des}(s)$ comme polynôme caractéristique du système corrigé.
   Determine the control matrix L to obtain $P_{des}(s)$ as the characteristic polynomial of the corrected system.

8. On souhaite en outre un gain unitaire en régime statique entre la consigne et la sortie. Déterminer la valeur du gain à appliquer en amont du retour d'état.
In addition, a static unit gain is required between the reference input (setpoint) and the output. Determine the value of the gain to be applied upstream of the state feedback.
9. Il s'avère que seule la variable d'état $x_1(t)$ peut être mesurée sur ce système. La commande par retour d'état étudiée aux questions 6, 7 et 8 pourra-t-elle être appliquée au système ?
It turns out that only the state variable $x_1(t)$ can be measured on this system. Can the state feedback control studied in questions 6, 7 and 8 be applied to the system ?

Ex. 16

Soit un processus en temps continu décrit par l'équation différentielle suivante :
Let a continuous time process be described by the following differential equation :

$$\dddot{y}(t) + 2\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) - 2y(t) = u(t) \ ,$$

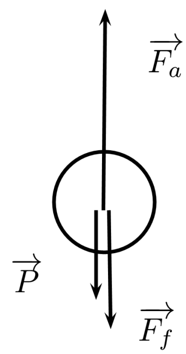
avec/*with* $\ddot{y}(0) = \dot{y}(0) = y(0) = 0$.

1. Donner la fonction de transfert du système.
Give the transfer function of the system.
2. Donner une représentation d'état de ce système.
Give a state representation of this system.
3. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice d'évolution.
Calculate the characteristic polynomial of the evolution matrix.
4. Vérifier que 1 est une racine de ce polynôme. Conclure quant à la stabilité du système.
Check that 1 *is a root of this polynomial. Is the system stable ?*

   On va appliquer une commande par retour d'état en vue d'imposer les pôles suivants au système : -1, -2 et -2.
   We will apply a state feedback control in order to impose the following poles to the system : -1, -2 and -2.
5. Quel est le polynôme caractéristique désiré $P_{des}(s)$ pour le système corrigé.
What is the desired characteristic polynomial $P_{des}(s)$ for the corrected system.
6. Le système est-il commandable ?
Is the system controllable ?
7. Déterminer la matrice de régulation L permettant d'atteindre l'objectif de commande.
Determine the control matrix L to achieve the control objective.
8. On souhaite en outre un gain unitaire entre la consigne e et la sortie y. Déterminer la valeur du gain à appliquer en amont du retour d'état.
In addition, a unit gain is desired between the reference input (setpoint) e and the output y. Determine the value of the gain to be applied upstream of the state feedback.

Ex. 17

On s'intéresse au système "ball-in-tube". Il est composé d'un tube dans lequel une balle est poussée verticalement par le flux d'air généré par un ventilateur situé à la base du tube. Seule une partie des forces s'exerçant sur la balle sont considérées et sont représentées sur la figure ci-dessous.
We are interested in the "ball-in-tube" system. It consists of a tube in which a ball is pushed vertically by the air flow generated by a fan located at the base of the tube. Only part of the forces acting on the ball are considered and are shown in the figure below.



On considère tout d'abord que la force $\overrightarrow{F_a}$ exercée par le flux d'air est proportionnelle au carré de la tension v appliquée au moteur du ventilateur, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{F_a} = \lambda v^2,$$

où λ est une constante positive.

Firstly, we consider that the force $\overrightarrow{F_a}$ exerted by the airflow is proportional to the square of the voltage v applied to the fan motor, i.e.

$$\overrightarrow{F_a} = \lambda v^2,$$

where λ is a positive constant.

La balle a une masse m et elle subit la gravité représentée par la force $\overrightarrow{P}$.

The ball has mass m and is subject to gravity represented by the force $\overrightarrow{P}$.

Enfin, on considère les frottements visqueux sous la forme de la force $\overrightarrow{F_f}$ d'intensité égale à β (une constante positive) multipliée par la vitesse de la balle.

Finally, we consider viscous friction in the form of the force $\overrightarrow{F_f}$ of intensity equal to β (a positive constant) multiplied by the speed of the ball.

1. Etablissez l'équation différentielle modélisant le comportement de la balle (considérée comme un point). Pour cela, notez $h(t)$ la position de la balle selon l'axe vertical.
   Establish the differential equation modelling the behaviour of the ball (considered as a point). To do this, note $h(t)$ the position of the ball along the vertical axis.
2. Remarquez que l'équation différentielle obtenue n'est pas linéaire. Pour contourner ce problème, on va considérer comme entrée du système la variable u, avec $u(t) = \frac{\lambda}{m}v^2(t) - g + h(t)$, plutôt que le signal v à partir duquel on agit réellement sur le système [1]. Proposer un modèle sous la forme d'une représentation d'état pour le système d'entrée $u(t)$ et de sortie $h(t)$.
   Note that the resulting differential equation is not linear. To get around this problem, we will consider the variable u as the input to the system, with $u(t) = \frac{\lambda}{m}v^2(t) - g + h(t)$, rather than the signal v from which the system is actually acted upon [2]. Propose a model in the form of a state representation for the input $u(t)$ and output $h(t)$ system.
3. Vérifiez que le système est stable.
   Check that the system is stable.

On rappelle qu'un système du deuxième ordre de gain k, de pulsation naturelle ω_n et de coefficient d'amortissement ξ admet la représentation d'état suivante :

It is recalled that a second order system of gain k, natural frequency ω_n and damping ratio ξ has the following state representation :

1. Notez que pour une entrée $u(t)$ établie pour le système, on pourra déduire la tension $v(t)$ à appliquer au moteur à l'aide de

$$v(t) = \begin{cases} \sqrt{(u(t) + g - h(t))m/\lambda}, & \text{si } u(t) > -g + h(t) \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Note that for an input $u(t)$ established for the system, we will be able to deduce the voltage $v(t)$ to be applied to the motor using

$$v(t) = \begin{cases} \sqrt{(u(t) + g - h(t))m/\lambda}, & \text{si } u(t) > -g + h(t) \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ k\omega_n^2 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

Le système "ball-in-tube" est un système du deuxième ordre avec $\xi = 0,5$, $\omega_n = 1$ et $k = 1$.
The ball-in-tube system is a second order system with $\xi = 0.5$, $\omega_n = 1$ and $k = 1$.

4. Assurez-vous que le système est commandable.
   Make sure the system is controllable.

On va appliquer une commande par retour d'état en vue d'imposer les pôles du système corrigé. Plus précisément, on souhaite que le système corrigé par retour d'état, admette pour polynôme caractéristique :
We will apply a state feedback control in order to impose the poles of the corrected system. More precisely, we wish that the system corrected by state feedback, admits for characteristic polynomial :

$$P_{des}(s) = s^2 + 6s + 9$$

5. Déterminer la matrice de régulation L permettant d'obtenir $P_{des}(s)$ comme polynôme caractéristique du système corrigé.
   Determine the control matrix L to obtain $P_{des}(s)$ as the characteristic polynomial of the corrected system.
6. On souhaite en outre un gain unitaire en régime statique entre la consigne et la sortie. Déterminer la valeur du gain à appliquer en amont du retour d'état.
   In addition, a static unit gain is required between the reference input (setpoint) and the output. Determine the value of the gain to be applied upstream of the state feedback.

Il s'avère que seule la position de la balle $h(t)$ peut être mesurée.
It turns out that only the position of the ball $h(t)$ can be measured.

7. Peut-on toujours envisager d'appliquer la commande par retour d'état ?
   Can we still consider applying the state feedback command ?
8. Commentez le choix de $P_{des}(s)$ proposé pour la question 5.
   Comment on the choice of $P_{des}(s)$ proposed for question 5.

Ex. 18

On considère le système **en temps continu** décrit par la représentation d'état suivante :
Consider the system **in continuous time** *described by the following state representation :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

où u est l'entrée, y la sortie et x le vecteur d'état.
where u is the input, y the output and x the state vector.

1. Calculer la fonction de transfert de ce système.
   Calculate the transfer function of this system.
2. Montrer que ce système est instable.
   Show that this system is unstable.
3. Est-il possible de stabiliser ce système à l'aide d'une commande par retour d'état et, plus précisément, d'imposer

   $$P_{des}(s) = (s + 3)(s + 4)$$

   comme polynôme caractéristique du système asservi ? Si oui, préciser comment y parvenir.
   Is it possible to stabilise this system using state feedback control and, more specifically, to impose

   $$P_{des}(s) = (s + 3)(s + 4)$$

   as the characteristic polynomial of the corrected system ? If so, specify how this is achieved.

Ex. 19

On considère le système **en temps discret** décrit par la représentation d'état suivante :
Consider the system **in discrete time** *described by the following state representation :*

$$\begin{cases} x(k+1) &= \begin{pmatrix} 0.5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0.1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(k) \end{cases}$$

où u est l'entrée, y la sortie et x le vecteur d'état.
where u is the input, y the output and x the state vector.

1. Le système est-il stable ?
   Is the system stable ?
2. Peut-on envisager de mettre en œuvre une commande par retour d'état sur ce système ?
   Is it possible to implement a state feedback control on this system ?
3. Y-a-t-il un bénéfice à appliquer un retour d'état avec pour matrice de régulation $\begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$?
   Is there a benefit to applying state feedback with the control matrix $\begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$?
4. y-a-t-il un bénéfice à appliquer un retour d'état avec pour matrice de régulation $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$?
   Is there a benefit to applying state feedback with the control matrix $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$?

Ex. 20

Soit un système en temps continu décrit par les équations différentielles suivantes :
Let a continuous time system be described by the following differential equations :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= -\alpha x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \alpha x_1(t) - \alpha x_2(t) \end{cases}$$

L'entrée du système est $u(t)$ et la sortie est $y(t) = x_2(t)$. On considère des conditions initiales nulles, c'est-à-dire $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = x_1(0) = x_2(0) = 0$. Le paramètre α est strictement positif.
The input of the system is $u(t)$ and the output is $y(t) = x_2(t)$. We consider zero initial conditions, i.e. $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = x_1(0) = x_2(0) = 0$. The parameter α is strictly positive.

1. Proposer un modèle sous la forme d'une représentation d'état pour ce système.
   Propose a model in the form of a state representation for this system.
2. Ce système est-il stable ?
   Is this system stable ?
3. Vérifier que ce système est commandable.
   Check that this system is controllable.
4. On souhaite appliquer une commande par retour d'état en vue d'imposer les pôles $-1+j$ et $-1-j$ au système corrigé. Déterminer la matrice de régulation L permettant d'obtenir ce résultat.
   It is desired to apply a feedback control to impose the poles $-1+j$ and $-1-j$ on the corrected system. Determine the control matrix L to achieve this result.
5. Finalement, on souhaite étudier ce système *via* un calculateur. On note Δ la période d'échantillonnage choisie. Donner les matrices de la représentation d'état du système échantillonné à la période Δ (c'est-à-dire les matrices notées A_{ech}, B_{ech} et C_{ech} dans votre support).
   Finally, we wish to study this system via a computer. Let us note Δ the chosen sampling period. Give the matrices of the state representation of the system sampled at period Δ (i.e. the matrices denoted A_{ech}, B_{ech} and C_{ech} in your manuscript).

   Indications :
   - the Laplace transform of $\frac{t^n}{n!}e^{-\alpha t}$ is $\frac{1}{(s+\alpha)^{n+1}}$;
   - the derivative (according to t) of $\frac{1}{a}e^{at+b}$ is e^{at+b} ;
   - $\displaystyle\int_0^{\Delta} \alpha(\Delta-\nu)e^{-\alpha(\Delta-\nu)}d\nu = \frac{1}{\alpha}(1 - \alpha\Delta e^{-\alpha\Delta} + e^{-\alpha\Delta})$.

Ex. 21

Soit un processus en temps discret décrit par la représentation d'état suivante :
Let a discrete time process be described by the following state representation :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(k+1) & = & \begin{pmatrix} 1 & 0,63 \\ 0 & 0,37 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0,37 \\ 0,63 \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(k) \end{array} \right.$$

On ne peut pas mesurer la deuxième composante du vecteur d'état. On va donc mettre en œuvre un reconstructeur afin d'estimer sa valeur. On rappelle sur la figure 9 le principe d'un reconstructeur d'état.
The second component of the state vector cannot be measured. We will thus implement an observer in order to estimate its value. We recall on the figure 9 the principle of a state observer.

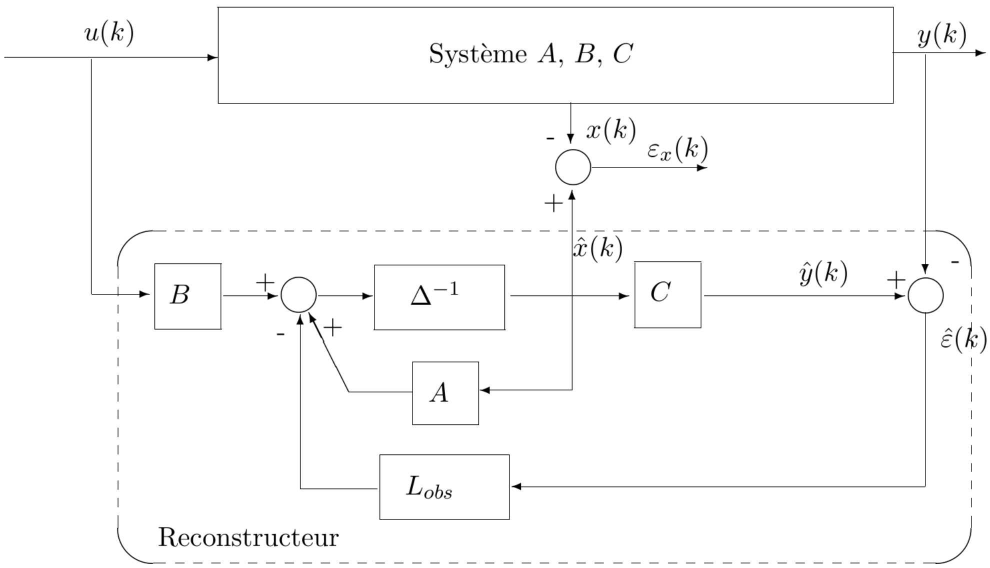


FIGURE 9 –

1. Vérifier que le système est observable.
   Check that the system is observable.
2. Calculer le polynôme caractéristique du reconstructeur, c'est-à-dire le polynôme $|z\mathbf{I} - A + L_{obs}C|$.
   Calculate the characteristic polynomial of the observer, i.e. the polynomial $|z\mathbf{I} - A + L_{obs}C|$.
3. Calculer L_{obs} pour que $|z\mathbf{I} - A + L_{obs}C|$ admette une racine double nulle (autrement dit, on cherche à imposer $P_{obs}(z) = z^2$).
   Calculate L_{obs} *so that* $|z\mathbf{I} - A + L_{obs}C|$ *admits a zero double root (in other words, we seek to impose* $P_{obs}(z) = z^2$*)*
4. Etablir l'équation récurrente modélisant l'évolution de l'erreur de reconstruction $\varepsilon_x(k) = \hat{x}(k) - x(k)$, et vérifier qu'elle s'annule toujours au bout de deux pas d'échantillonnage.
   Establish the recurrent equation modelling the evolution of the observation error $\varepsilon_x(k) = \hat{x}(k) - x(k)$, *and verify that it always cancels after two sampling steps.*

Ex. 22

L'équation différentielle modélisant un système du deuxième ordre **en temps continu** d'entrée u et de sortie y peut s'écrire :
The differential equation modelling a second order system **in continuous time** *with input u and output y can be written :*

$$\ddot{y}(t) = -2\xi\omega_n\dot{y}(t) - \omega_n^2 y(t) + k\omega_n^2 u(t) \; .$$

On considère le système **en temps continu** décrit par l'équation différentielle suivante (avec $\dot{y}(0)) = y(0) = 0)$:
Consider the system **in continuous time** *described by the following differential equation (with* $\dot{y}(0)) = y(0) = 0$*) :*

$$\ddot{y}(t) = -9y(t) + 18u(t) .$$

1. Donner la fonction de transfert de ce système.
   Give the transfer function of this system.
2. Donner une représentation d'état de ce système.
   Give a state representation of this system.
3. On va étudier ce système à l'aide d'un calculateur. Préciser l'intervalle dans lequel la période d'échantillonnage Δ devrait être choisie.
   This system will be studied with the help of a calculator. Specify the interval in which the sampling period Δ *should be chosen.*
4. Donner les matrices de la représentation d'état du système échantillonné à la période Δ.
   Give the matrices of the state representation of the system sampled at period Δ. Indications :
   - Laplace transform of $\sin(at)$ is $\frac{a}{s^2+a^2}$;
   - Laplace transform of $\cos(at)$ is $\frac{s}{s^2+a^2}$;
   - Derivative (according to t) of $\cos(at+b)$ is $-a\sin(at+b)$;
   - Derivative (according to t) of $\sin(at+b)$ is $a\cos(at+b)$;
   - $\sin(0) = 0$ and $\cos(0) = 1$.
5. Supposons que / *Assume that*

$$A_{ech} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} ; B_{ech} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} ; C_{ech} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

   Ce système est-il observable ? / *Is this system observable ?*
6. Calculer le polynôme caractéristique du reconstructeur, c'est-à-dire le polynôme $|z\mathbf{I} - A_{ech} + L_{obs}C_{ech}|$.
   Calculate the characteristic polynomial of the reconstructor, i.e. the polynomial $|z\mathbf{I} - A_{ech} + L_{obs}C_{ech}|$.
7. Calculer L_{obs} pour que $|z\mathbf{I} - A_{ech} + L_{obs}C_{ech}|$ admette une racine double nulle (autrement dit, on cherche à imposer $P_{obs}(z) = z^2$).
   Calculate L_{obs} *so that* $|z\mathbf{I} - A_{ech} + L_{obs}C_{ech}|$ *admits a zero double root (in other words, we try to impose* $P_{obs}(z) = z^2$*).*

Ex. 23

Système étudié / *System studied*

Le système étudié est un pendule inversé (voir figure 10). Il est composé d'un chariot mobile sur lequel est fixé un pendule par une liaison pivot. On considére que le lieu de déplacement du chariot est une droite, et que celui du pendule est un plan (comme schématisé). Un moteur sur le chariot permet d'appliquer la force $f(t)$.
The system studied is an inverted pendulum (see figure 10). It is composed of a mobile carriage on which a pendulum is fixed by a pivot link. We consider that the place of displacement of the carriage is a straight line, and that the place of displacement of the pendulum is a plane (as schematized). A motor on the carriage is used to apply the force $f(t)$.

En supposant de petits mouvements autour de la position verticale du pendule ($\theta = 0$) et en faisant plusieurs hypothèses (raisonnables), le système se modélise par l'équation différentielle suivante :
Assuming small movements around the vertical position of the pendulum ($\theta = 0$) *and making several (reasonable) assumptions, the system is modelled by the following differential equation :*

$$\ddot{\theta}(t) = a^2\theta(t) - bf(t),$$

avec a et b deux constantes positives.
with a *and* b *two positive constants.*

Modélisation et analyse du système / *System modelling and analysis*

Question 1 *Donner la représentation d'état du système en prenant*
Give the state representation of the system by taking

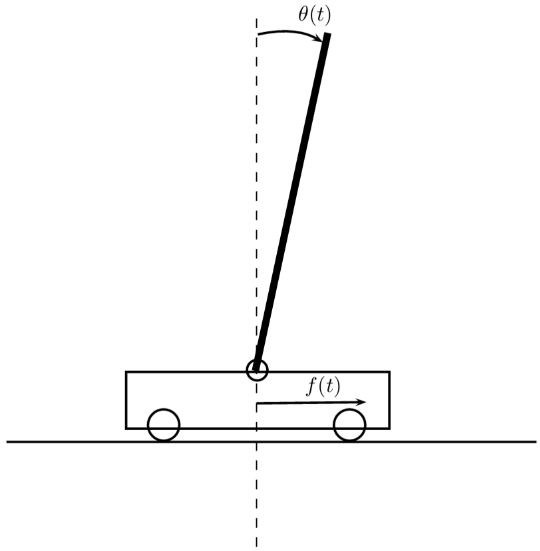


FIGURE 10 – Schéma du pendule inversé *Diagram of the inverted pendulum*

- $f(t)$ *comme entrée* / as input,
- $\theta(t)$ *comme sortie* / as output,
- $\begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$ *comme vecteur d'état* / as state vector.

Question 2 *Montrer que le système est instable. En se basant sur la signification des variables mises en jeu dans la représentation d'état, donnez une interprétation de l'instabilité du système.*
Show that the system is unstable. Based on the meaning of the variables involved in the state representation, give an interpretation of the instability of the system.

Question 3 *Montrer que le système est commandable.* Show that the system is controllable.

Stabilisation du système / *System stabilisation*

On va chercher à stabiliser le système à l'aide d'une commande par retour d'état (voir figure 11).
We will try to stabilise the system by means of a state feedback control (see figure11).

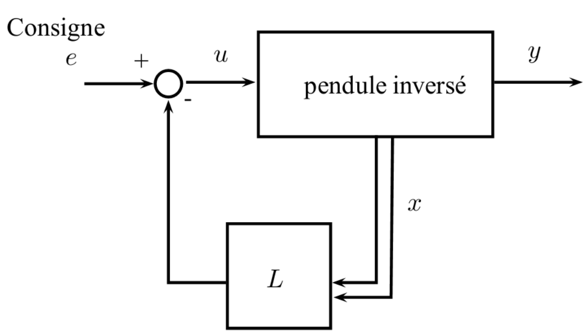


FIGURE 11 – Structure de la commande par retour d'état / *Structure of the state feedback control*

Question 4 *On rappelle qu'un système du deuxième ordre de gain k, de pulsation naturelle ω_n et de coefficient d'amortissement ξ admet la représentation d'état suivante :*

It is recalled that a second order system of gain k, natural frequency ω_n and damping ratio ξ has the following state representation :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ k\omega_n^2 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{array} \right.$$

avec / with $x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$.

On veut imposer comme polynôme caractéristique du système corrigé / We want to impose as characteristic polynomial of the corrected system

$$P_{des}(s) = s^2 + \frac{8}{5}\omega_{nd}s + \omega_{nd}^2, \tag{2}$$

où ω_{nd} est la pulsation naturelle désirée pour le système.
where ω_{nd} is the desired natural frequency for the system.
Quelle sera la valeur du coefficient d'amortissement du système une fois corrigé ? Commentez ce choix.
What will be the value of the damping ratio of the system when corrected ? Comment on this choice.

Question 5 *Exprimer la matrice de régulation L (en fonction de ω_{nd}, a et b) permettant d'imposer le polynôme caractéristique désiré donné par (2).*
Express the control matrix L (as a function of ω_{nd}, a and b) to impose the desired characteristic polynomial given by (2).

Question 6 *Supposons qu'on ne puisse pas mesurer $\dot{\theta}$. Pourquoi est-il nécessaire d'ajouter un observateur d'état pour appliquer la commande ? Est-il possible d'appliquer avec succès un observateur d'état ?*
Suppose we cannot measure $\dot{\theta}$. Why is it necessary to add a state observer to apply the command ? Is it possible to successfully apply a state observer ?

Etude en temps discret

On va maintenant considérer que l'on doit commander le système à l'aide d'un calculateur, et donc l'étudier comme un système échantillonné.
We will now consider that we must control the system with a computer, and therefore study it as a sampled system.

Question 7 *Calculer les matrices A_{ech}, B_{ech} et C_{ech} de la représentation d'état en temps discret du système échantillonné à la période Δ.*
Calculate the matrices A_{ech}, B_{ech} and C_{ech} of the discrete time state representation of the system sampled at period Δ.
Indications :

- *Laplace transform of* $\sinh(at)$ *is* $\frac{a}{s^2-a^2}$;
- *Laplace transform of* $\cosh(at)$ *is* $\frac{p}{p^2-a^2}$;
- *Derivative (according to t) of* $\sinh(t)$ *is* $\cosh(t)$;
- *Derivative (according to t) of* $\cosh(t)$ *is* $\sinh(t)$;
- $\cosh(0) = 1$, $\sinh(0) = 0$.

Question 8 *Spécifier l'intervalle dans lequel Δ peut être choisie.*
Specify the range in which Δ can be chosen.

Question 9 *A l'aide de sa représentation d'état en temps discret, montrer que le système est instable.*
Using its discrete time state representation, show that the system is unstable.

Question 10 *Toujours à l'aide de sa représentation d'état en temps discret, vérifier que le système est commandable.*
Still using its discrete-time state representation, check that the system is controllable.

Ex. 24

Régulation de la température d'un bâtiment / *Controlling the temperature of a building*

On s'intéresse à la régulation de la température au sein d'un bâtiment schématisé comme suit.
We are interested in temperature control within a building schematically represented as follows.

Le bâtiment est constitué de trois pièces (leurs températures sont notées $T_1(t)$, $T_2(t)$ et $T_3(t)$) et de deux sources de chaleur réversibles (typiquement des dispositifs pouvant jouer le rôle de radiateur et de climatiseur) de températures respectives $T_4(t)$ et $T_5(t)$. Toutes les grandeurs de l'énoncé sont supposées être exprimées en unités du système international (qui ne sont pas précisées ici).

On suppose que le bâtiment est très bien isolé et on néglige donc les échanges de chaleur avec l'extérieur. Une pièce est alors susceptible d'échanger de la chaleur avec la (ou les) pièce(s) mitoyenne(s) et l'éventuelle source de chaleur qu'elle contient. On modélise de façon simplifiée le comportement thermique du bâtiment. Pour cela, on considère les échanges de chaleur de la manière suivante.

The building consists of three rooms (their temperatures are denoted $T_1(t)$, $T_2(t)$ and $T_3(t)$) and two reversible heat sources (typically devices that can act as radiators and air conditioners) of temperatures $T_4(t)$ and $T_5(t)$ respectively. All quantities in the statement are assumed to be expressed in units of the international system (which are not specified here).

It is assumed that the building is very well insulated and therefore heat exchange with the outside is neglected. A room is then likely to exchange heat with the adjoining room(s) and any heat source it contains. The thermal behaviour of the building is modelled in a simplified way. For this purpose, the heat exchange is considered as follows.

— Entre deux pièces i et j aux températures T_i et T_j, ou entre une pièce à la température T_i et une source de chaleur à la température T_j, il existe un flux de chaleur Φ_{ij} proportionnel à la différence entre les deux températures :
Between two rooms i and j at temperatures T_i and T_j, or between a room at temperature T_i and a heat source at temperature T_j, there is a heat flow Φ_{ij} proportional to the difference between the two temperatures :

$$\Phi_{ij}(t) = \frac{1}{K_{ij}}(T_j(t) - T_i(t)) \tag{3}$$

où K_{ij} est une constante telle que $K_{ij} > 0$ et $K_{ij} = K_{ji}$.
where K_{ij} is a constant such that $K_{ij} > 0$ and $K_{ij} = K_{ji}$.

— La variation de la température dans une pièce i dépend des flux de chaleur et de sa capacité thermique C_i selon :
The variation of the temperature in a room i depends on the heat flows and its thermal capacity C_i according to :

$$\dot{T}_i(t) = \frac{1}{C_i}\sum_{j=1}^{3} \Phi_{ij}(t) \ . \tag{4}$$

Modélisation / *Modelling*

1. Établir l'équation différentielle décrivant l'évolution de $T_1(t)$. *Idem* pour $T_2(t)$ et $T_3(t)$.
   Establish the differential equation describing the evolution of $T_1(t)$. Idem for $T_2(t)$ and $T_3(t)$.
2. Établir l'équation d'évolution du modèle d'état du bâtiment, en prenant
   Establish the evolution equation of the building state model, taking
   - $T_1(t)$, $T_2(t)$, $T_3(t)$ comme variables d'état / *as state variables*,
   - $T_4(t)$, $T_5(t)$ comme entrées / *as inputs.*
3. On suppose disposer d'une sonde dans chaque pièce permettant de mesurer $T_1(t)$, $T_2(t)$ et $T_3(t)$. On choisit comme sortie du système la moyenne des températures mesurées dans les trois pièces. Écrire l'équation de sortie associée à l'équation d'état établie à la question précédente.
   It is assumed that there is a sensor in each room to measure $T_1(t)$, $T_2(t)$ and $T_3(t)$. The average of the temperatures measured in the three rooms is chosen as the output of the system. Write the output equation associated with the equation of state established in the previous question.

Régulation de la température à l'aide d'une commande par retour d'état / *Temperature control by means of state feedback*

On considère ici qu'une seule sonde est installée dans la pièce 2. De plus, les constantes qui caractérisent le bâtiment et les sources sont telles que le modèle d'état du bâtiment est le suivant :
It is considered here that only one sensor is installed in room 2. Furthermore, the constants characterising the building and the sources are such that the state model of the building is as follows :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{array} \right.$$

avec / *with*

$$x(t) = \begin{pmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ T_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u(t) = \begin{pmatrix} T_4(t) \\ T_5(t) \end{pmatrix}.$$

On va appliquer une commande par retour d'état agissant sur les températures des sources de chaleur pour asservir les températures des pièces 1, 2 et 3.
A feedback control acting on the temperatures of the heat sources will be applied to control the temperatures of rooms 1, 2 and 3.

4. Le système est-il commandable ?
   Is the system controllable ?
5. Supposons que l'on veuille appliquer comme matrice de régulation la matrice
   $$L = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$
   Le système asservi est-il stable ?
   Suppose we want to apply the matrix
   $$L = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$
   Is the corrected system stable ?
6. Préciser (en justifiant) si un reconstructeur d'état serait nécessaire et possible pour pouvoir appliquer la commande par retour d'état.
   Specify (with justification) whether a state observer would be necessary and possible to apply the state feedback control.
7. Mêmes questions que les questions 5 et 6 avec
   Same questions as 5 and 6 with
   $$L = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$