Intervalle de confiance - Données censurées

1 Durées de vie exponentielles: Echantillon complet

Supposons que nous avons enregistré un échantillon complet de n durées de vie $T_1, T_2, \cdots, T_n$ qui sont i.i.d. suivant une exponentielle dont le taux de défaillance λ est inconnu. La fonction de vraisemblance s'écrit classiquement:

$$L(\lambda; t_1, \cdots, t_n) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{j=1}^{n} t_j} \quad \text{pour } \lambda > 0, t_j > 0, j = 1, \cdots, n \tag{1}$$

Le MLE de λ est

$$\lambda^* = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} t_j} = \frac{n}{\mathcal{T}(T_{(n)})} \tag{2}$$

où $\mathcal{T}(T_{n(n)})$ est le temps total de test défini par la dernière défaillance $T_{(n)}$. Etudions les propriétés de cet estimateur et en premier déterminons s'il est biaisé ou non.

Comme T_j est distribuée exponentiellement de paramètre λ, $2\lambda T_j$ sera $\mathcal{X}^2$ distribué avec deux degrés de liberté pour $j = 1, \cdots, n$.

La preuve est la suivante:

Comme les T_j sont indépendants, $2\lambda \sum_{j=1}^{n} T_j$ sera $\mathcal{X}^2$ distribué avec $2n$ degrés de liberté. Ainsi,

$$\lambda^* = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} T_j} = \frac{2n\lambda}{2\lambda \sum_{j=1}^{n} T_j}$$

a la même loi que $2n\lambda/Z$ où Z est $\mathcal{X}^2$ distribué à $2n$ degrés de liberté. On a

$$E(\lambda^*) = 2n\lambda E\left(\frac{1}{N}\right)$$

et

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{1}{Z}\right) &= \int_0^\infty \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{\Gamma(n)}\cdot z^{n-1}e^{z/2}\,dz \\
&= \frac{1}{2(n-1)}\int 0^\infty \frac{1}{2^{n-1}\Gamma(n-1)} z^{n-2}e^{-z/2}\,dz \\
&= \frac{1}{2(n-1)}
\end{aligned}$$

D'où

$$E(\lambda^*) = 2n\lambda\cdot\frac{1}{2(n-1)} = \frac{n}{n-1}\cdot\lambda$$

L'estimateur λ^* est trivialement non biaisé. L'estimateur $\hat{\lambda}$, donné par

$$\hat{\lambda} = \frac{n-1}{n}\cdot\lambda^* = \frac{n-1}{\sum_{j=1}^n t_j} = \frac{n-1}{\mathcal{T}(T_{(n)})}$$

est donc non biaisé. Regardons maintenant $var(\hat{\lambda})$:

$$var(\hat{\lambda}) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot var(\lambda^*) = 4(n-1)^2\lambda^2 var\left(\frac{1}{Z}\right)$$

où Z a la même signification que précédemment. Maintenant

$$var\left(\frac{1}{Z}\right) = E\left(\frac{1}{Z^2}\right) - \left[E\left(\frac{1}{Z}\right)\right]^2$$

et

$$E\left(\frac{1}{Z^2}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{\Gamma(n)}\cdot z^{n-1}e^{z/2}\,dz = \frac{1}{4(n-1)(n-2)}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
var(\hat{\lambda}) &= 4(n-1)^2\lambda^2\cdot\left(\frac{1}{4(n-1)(n-2)} - \frac{1}{4(n-1)^2}\right) \\
&= (n-1)\lambda^2\cdot\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{\lambda^2}{n-2}
\end{aligned}$$

L'estimateur

$$\hat{\lambda} = \frac{n-1}{\mathcal{T}(T_{(n)})} \tag{3}$$

est alors non biaisé et de variance

$$var(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda^2}{n-2} \tag{4}$$

Pour établir un intervalle de confiance à α pour λ, on utilise le fait que $2\lambda \sum_{j=1}^{n} T_j$ est $\mathcal{X}^2$ distibué à $2n$ degrés de liberté. Ainsi

$$Pr\left(z_{\alpha/2,2n} \leq 2\lambda \sum_{j=1}^{n} T_j \leq t_{1-\alpha/2,2n} \right) = \alpha$$

et

$$Pr\left(\frac{z_{\alpha/2,2n}}{2\sum_{j=1}^{n} T_j} \leq \lambda \leq \frac{z_{1-\alpha/2,2n}}{2\sum_{j=1}^{n} T_j} \right) = \alpha$$

Donc un intervalle de confiance à α pour λ est

$$\left(\frac{z_{\alpha/2,2n}}{2\sum_{j=1}^{n} T_j}, \frac{z_{1-\alpha/2,2n}}{2\sum_{j=1}^{n} T_j} \right) \tag{5}$$

Pour affirmer ou non que le taux de défaillance λ est plus petit qu'un certain λ_0, on formule ce problème comme un problème de test d'hypothèse. On teste

$$H_0 \ : \ \lambda \geq \lambda_0 \ \text{ contre } \ H_1 \ : \ \lambda < \lambda_0$$

Comme première étape, construisons le test pour

$$H_0' \ : \ \lambda = \lambda_0 \ \text{ contre } \ H_1 \ : \ \lambda < \lambda_0$$

Il semble raisonnable de rejeter H_0' quand $\hat{\lambda} \leq k$, où k est déterminé pour donner au test le niveau significatif ϵ:

$$Pr(\hat{\lambda} \leq k \mid H_0') \leq \epsilon$$

Maintenant

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda} \leq k \quad &\iff \quad \frac{1}{\hat{\lambda}} \geq \frac{1}{k} \\
&\iff \quad \frac{1}{(n-1)} \sum_{j=1}^{n} T_j \geq \frac{1}{k} \\
&\iff \quad 2\lambda_0 \sum_{j=1}^{n} T_j \geq \frac{2(n-1)}{k} \cdot \lambda_0
\end{aligned}$$

En introduisant $2\lambda_0(n-1)/k = c$, le test peut se ré-écrire comme

$$\text{Rejeter } H_0' \text{ quand } 2\lambda_0 \sum_{j=1}^{n} T_j \geq c$$

Sous l'hypothèse H_0', $2\lambda_0 \sum_{j=1}^n T_j$ est $\mathcal{X}^2$ distribué à $2n$ degrés de liberté et, par conséquence, c est choisi égal à $z_{\epsilon,2n}$.

Intuititivement, le même test peut être utilisé pour tester H_0 contre H_1. Le test repose sur l'équation

$$\begin{aligned} Pr\left(2\lambda_0 \sum_{j=1}^n T_j \geq z_{\epsilon,2n} \mid \lambda\right) &= Pr\left(2\lambda \sum_{j=1}^n T_j \geq \frac{\lambda}{\lambda_0} z_{\epsilon,2n}\right) \\ &= 1 - \Gamma_{2n}\left(z_{\epsilon,2n} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

Ici, $\Gamma_{2n}(z)$ représente la fonction de distribution d'une loi du $\mathcal{X}^2$ à $2n$ degrés de liberté, et est donc non décroissante en z. Par conséquent, $1 - \Gamma_{2n}\left(z_{\epsilon,2n} \cdot \lambda/\lambda_0\right)$ est non croissante en λ et

$$Pr\left(2\lambda_0 \sum_{j=1}^n T_j \geq z_{\epsilon,2n} \mid \lambda\right) \leq \epsilon \quad \text{pour} \quad \lambda \geq \lambda_0$$

avec l'égalité pour $\lambda = \lambda_0$. Pour tester

$$H_0 \;:\; \lambda \geq \lambda_0 \quad \text{contre} \quad H_1 \;:\; \lambda < \lambda_0 \tag{7}$$

on utilise alors le critère de test:

$$\text{Rejeter } H_0 \text{ quand } 2\lambda_0 \sum_{j=1}^n T_j \geq z_{\epsilon,2n} \tag{8}$$

La fonction de précision du test est donnée par (6).

2 Durées de vie exponentielles: Données censurées

Supposons que n produits identiques et indépendants présentant un taux de défaillance constant λ aient été observées jusqu'à leur défaillance ou bien la date de censure. Soit U le sous-ensemble des indices correspondant aux temps de fonctionnement non censurés, signifiant que si $j \in U$ alors le temps T_j est un temps de défaillance, pour $j = 1, \cdots, n$. De manière équivalente, soit C l'ensemble des indices des temps censurés. La fonction de vraisemblance est dans ce cas

$$\begin{aligned} L(\lambda; t_1, t_2, \cdots, t_n) &= \prod_{j \in U} f(t_j; \lambda) \prod_{i \in C} R(t_i : \lambda) \\ &= \prod_{j \in U} \lambda e^{-\lambda t_j} \prod_{i \in C} e^{i\lambda t_i} \end{aligned} \tag{9}$$

2.1 Censure de type II

Avec une censure de type II, le test de durée de vie est terminé dès qu'on observe r défaillances. L'ensemble des données contiendra alors r dates de défaillance et $n-r$ dates de censure. On peut alors montrer que la fonction de vraisemblance dans ce cas est

$$\begin{aligned} L(\lambda; t_1, t_2, \cdots, t_n) &\propto \frac{n!}{(n-r)!}\lambda^r e^{-\lambda[\sum_j=1^r t_j+(n-r)t_r]} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!}\lambda^r e^{-\lambda\mathcal{T}(t_r)} \text{ pour } 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_r \end{aligned}$$

et on détermine l'estimateur du maximum de vraisemblance λ^*_{II} de λ de façon classique:

$$\lambda^*_{II} = \frac{r}{\mathcal{T}(t_r)} \tag{10}$$

Etudions les propriétés d'un tel estimateur. Cherchons en premier lieu sa distribution de probabilité. Si D_j est l'intervalle de temps entre la $(j-1)$-ème à la j-ème défaillance, alors on a

$$\begin{aligned} T_1 &= D_1 \\ T_2 &= D_1 + D_2 \\ \vdots &\ \vdots \\ T_r &= D_1 + D_2 + \cdots + D_r \end{aligned}$$

et

$$\sum_{j=1}^{r} T_{(j)} = rD_1 + (r-1)D_2 + \cdots + D_r$$

On a par ailleurs,

$$(n-r)T_(r) = (n-r)(D_1 + D_2 + \cdots + D_r)$$

On en déduit la durée totale du test à $T_{(r)}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(T_{(r)}) &= nD_1 + (n-1)D_2 + \cdots + (n-(r-1))D_r \\ &= \sum_{j=1}^{r}(n-(j-1))D_j \end{aligned}$$

En introduisant la notation suivante:

$$D^*_j = (n-(j-1))D_j \text{ pour } j = 1, 2, \cdots, r$$

, on peut facilement montrer que $2\lambda D_1^*, 2\lambda D_2^*, \cdots, 2\lambda D_r^*$ sont indépendants et sont $\mathcal{X}^2$ distribués, chacun à 2 degrés de liberté. Ainsi, $2\lambda\mathcal{T}(T_{(r)})$ est $\mathcal{X}^2$ distribué à $2r$ degrés de liberté, et on peut l'utiliser pour trouver $E(\lambda_{II}^*)$:

$$E(\lambda_{II}^*) = E\left(\frac{r}{\mathcal{T}(T_{(r)})}\right) = 2\lambda r \cdot E\left(\frac{1}{2\lambda\mathcal{T}(T_{(r)})}\right) = 2\lambda r \cdot E\left(\frac{1}{Z}\right)$$

où Z est $\mathcal{X}^2$ distribuée à $2r$ degrés de liberté. Ceci implique que

$$E\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{1}{2(r-1)}$$

Ainsi,

$$E(\lambda_{II}^* = 2\lambda r \cdot \frac{1}{2(r-1)})\lambda \cdot \frac{r}{r-1}$$

L'estimateur λ_{II}^* est donc biaisé. Par contre,

$$\hat{\lambda}_{II} = \frac{r-1}{\mathcal{T}(T_{(r)})} \tag{11}$$

est non biaisé. On peut montrer par analogie avec la section précédente que

$$var(\hat{\lambda}_{II}) = \frac{\lambda^2}{r-2}$$

Les intervalles de confiance, de même que les tests pour les hypothèses classiques sur λ, peuvent être dérivés par le fait que $2\lambda\mathcal{T}(T_{(r)})$ est $\mathcal{X}^2$ distribué à $2r$ degrés de liberté. La procédure est la même que pour la section précédente.

2.2 Censure de type I

Le fait que le nombre (S) de produits qui tombent en panne avec la date t_0 soit stochastique rend ce cas plus difficile à traiter d'un point de vue probabiliste. Nous chercherons cependant à suggérer un estimateur intuitif de λ.

En tout premier lieu, remarquons que les estimateurs de λ, dérivés pour des données complètes ou censurées de type II, pouvaient tous être écrits comme le ratio avec le numérateur égal au "nombre de défaillances observées-1" et le dénominateur égal à la durée totale de test à la fin du test. Intuitivement, il semble raisonnable d'utiliser la même fraction pour une censure de type I.

Dans ce cas, le nombre de défaillances est S tandis que la durée totale de test est

$$\mathcal{T}(t_0) = \sum_{j=1}^{S} T_{(j)} + (n - S)t_0 \tag{12}$$

Ainsi,

$$\hat{\lambda}_I = \frac{S-1}{\mathcal{T}(t_0)}$$

semble être un estimateur raisonnable de λ. On peut montrer que cet estimateur est biaisé pour de petits échantillons. Toutefois, on peut montrer qu'asymptotiquement il possède les mêmes propriétés que celles de $\hat{\lambda}_{II}$.