Estimateur du maximum de vraisemblance pour une loi de Weibull dans le cas de censures à droite

La démarche est exactement identique à celle des données censurées et données pour la loi exponentielle. La vraisemblance est définie par :

$$L_{(\beta,\eta)}(t_1,t_2,\dots t_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{(\beta,\eta)}(t_i)^{1-\delta_i} R_{(\beta,\eta)}(t_i)^{\delta_i} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}\right)^{1-\delta_i} \cdot e^{-\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}}$$

La Log-Vraisemblance associée est alors :

$$Ln\ L_{(\beta,\eta)} = (n-r)\ln\beta - (n-r)\beta\ln\eta + (\beta-1)\sum_{i=1}^{n-r}\ln t_i - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}$$

D'où le système d'équations de dérivées partielles :

$$(S)\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\beta} Ln\ L_{(\beta,\eta)} = \dfrac{n-r}{\beta} - (n-r)\ ln\eta + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-r}\ln t_i - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}(\ln t_i - \ln\eta) \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta} Ln\ L_{(\beta,\eta)} = -(n-r)\dfrac{\beta}{\eta} + \dfrac{\beta}{\eta^{\beta+1}}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta} \end{cases}$$

Par définition, l'EMV est solution de $(S) = 0$. On a alors :

$(S) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\beta} Ln\ L_{(\beta_{EMV},\eta_{EMV})} = \dfrac{n-r}{\beta_{EMV}} - (n-r)\ ln\eta_{EMV} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-r}\ln t_i - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i}{\eta_{EMV}}\right)^{\beta_{EMV}}(\ln t_i - \ln\eta_{EMV}) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta} Ln\ L_{(\beta,\eta)} = -(n-r)\dfrac{\beta_{EMV}}{\eta_{EMV}} + \dfrac{\beta_{EMV}}{\eta_{EMV}{}^{\beta_{EMV}+1}}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta_{EMV}} = 0 \end{cases}$$

L'équation (2) peut s'exprimer de la façon suivante

$$-(n-r)\ln\eta + \frac{\ln\eta}{\eta_{EMV}{}^{\beta_{EMV}}}\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta_{EMV}} = 0$$

Ou encore

$$\frac{1}{\eta_{EMV}{}^{\beta_{EMV}}} = \frac{n-r}{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta_{EMV}}}$$

En utilisant ces 2 formes de l'équation (2) et en les introduisant dans l'équation (1) du système (S), on obtient la forme simplifiée du système suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\beta_{EMV}} + \dfrac{\sum_{i=1}^{n-r} \ln t_i}{n-r} - \dfrac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta_{EMV}} \ln t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta_{EMV}}} = 0 \\ \eta_{EMV} = \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta_{EMV}}}{n-r} \right)^{\frac{1}{\beta_{EMV}}} \end{cases}$$

Pour l'intervalle de confiance, il est alors nécessaire de dériver une seconde fois cette expression. On obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} Ln\, L_{(\beta,\eta)} = -\frac{n-r}{\beta^2} - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta} (\ln t_i - \ln \eta)^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \eta} Ln\, L_{(\beta,\eta)} = -\frac{(n-r)}{\eta} + \frac{1}{\eta^{\beta+1}} \sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta} \big(1 + \beta(\ln t_i - \ln \eta)\big)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} Ln\, L_{(\beta,\eta)} = (n-r)\frac{\beta}{\eta^2} - \frac{\beta(\beta+1)}{\eta^{\beta+2}} \sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta}$$

Il faut ainsi coder ces 3 fonctions sous Excel pour construire la matrice d'information de Fisher sans oublier de le multiplier par (-1) et ensuite d'inverser cette matrice pour en trouver l'estimation de la matrice de variance-covariance des estimateurs.

Remarquez bien la différence dans le cas non censuré !!

Bonne chance.